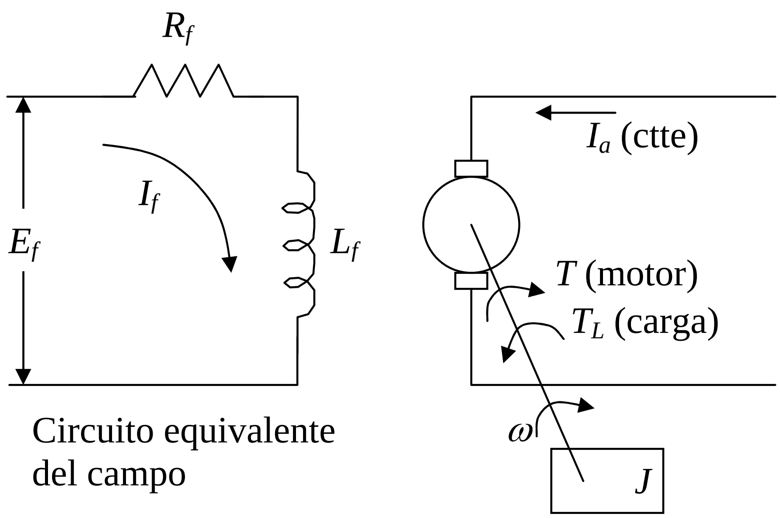
SISTEMAS MIXTOS

1.- SISTEMA ELECTRO-MECANICO

Sistema de control de velocidad de un motor DC por un circuito de campo representado por una resistencia R_f y una inductancia L_f . El voltaje aplicado al campo E_f se obtiene de un amplificador a baja potencia. La corriente I_a es suministrada por una fuente o una línea AC. La carga T_L es la carga que se le aplica al motor (entrada del sistema).



Objetivo: Determinar la respuesta dinámica la velocidad angular del eje $\omega(t)$ ante una variación del voltaje $E_f(t)$ y como función de la carga del motor $T_L(t)$.

Suposiciones:

1.- Corriente I_a constante

2.- Comportamiento lineal de los elementos

Constantes:

k_1 = Constante propia del motor

I_a = Corriente de la armadura

B_r = Coeficiente viscoso de fricción

J = Inercia de la armadura

R_f = Resistencia

L_f = Inductancia

k_1 = Constante de prop.

k_m = Constante del motor

Variables:

$\omega(t)$ = velocidad angular del eje

$\phi(t)$ = Flujo magnético del campo

$E_f(t)$ = Voltaje aplicado al campo

$E_R(t)$ = Voltaje en la resistencia

$T(t)$ = Torque o par desarrollado por el motor

$I_f(t)$ = Corriente del campo

$T_L(t)$ = Torque de carga

$T_f(t)$ = Torque de fricción

$E_L(t)$ = Voltaje en el inductor

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Ley de Kirchoff en la parte eléctrica***

$$E_f(t) = E_R(t) + E_L(t) \qquad (1)$$

- ***Ley de Newton en la parte mecánica***

$$T(t) - T_f(t) - T_L(t) = J\,\frac{d\omega(t)}{dt} \qquad (2)$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$T_f(t) = B_r\,\omega(t) \qquad (3)$$

$$E_R(t) = R_f\,I_f(t) \qquad (4)$$

$$E_L(t) = L_f\,\frac{dI_f(t)}{dt} \qquad (5)$$

- ***Ecuaciones de transformación***

$$T(t) = f(I_f) \qquad (6)$$

$$E_L(t) = f(\omega) \qquad (7)$$

Para encontrar estas relaciones de transformación sabemos que:

$$\phi(t) = k_f\,I_f(t) \qquad (8)$$

$$T(t) = k_1\,\phi(t)\,I_a \qquad (9)$$

Sustituyendo (8) en (9)

$$T(t) = k_1 \, I_a \, k_f \, I_f \, (t) \tag{10}$$

$$E_L(t) = k \, \omega(t) \tag{11}$$

Modelo completo del sistema electro-mecánico:

$$k_m \, I_a \, I_f(t) - B_r \, \omega(t) - T_L(t) = J \, \frac{d\omega(t)}{dt} \tag{12}$$

$$E_f(t) = R_f \, I_f(t) + L_f \, \frac{dI_f(t)}{dt} \tag{13}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

Expresando las ecuaciones (12) y (13) en variables de perturbación:

$$k_m \, I_a \, I_f{}^*(t) - B_r \, \omega^*(t) - T_L{}^*(t) = J \, \frac{d\omega^*(t)}{dt} \tag{14}$$

$$E_f(t) = R_f \, I_f{}^*(t) + L_f \, \frac{dI_f{}^*(t)}{dt} \tag{15}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$k_m \, I_a \, I_f{}^*(s) - B_r \, \omega^*(s) - T_L{}^*(s) = Js\omega^*(s) \tag{16}$$

$$E_f(s) = R_f \, I_f{}^*(s) + L_f \, sI_f{}^*(s) \tag{17}$$

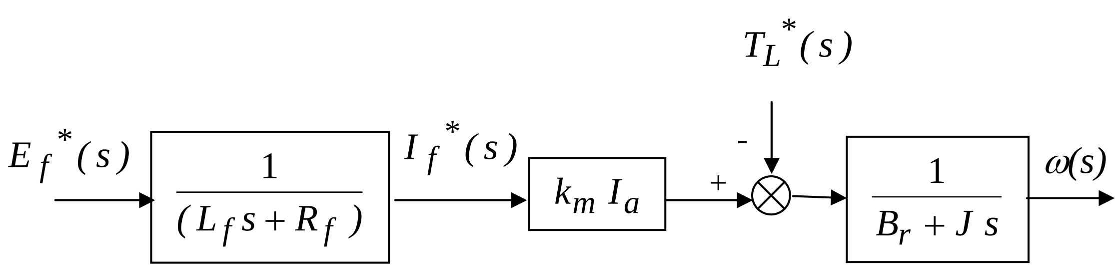
y manipulando convenientemente:

$$\omega^*(s) = \frac{1}{(J\,s + B_r)}\left(K_m\, I_a\, I_f^*(s) - T_L^*(s)\right) \tag{18}$$

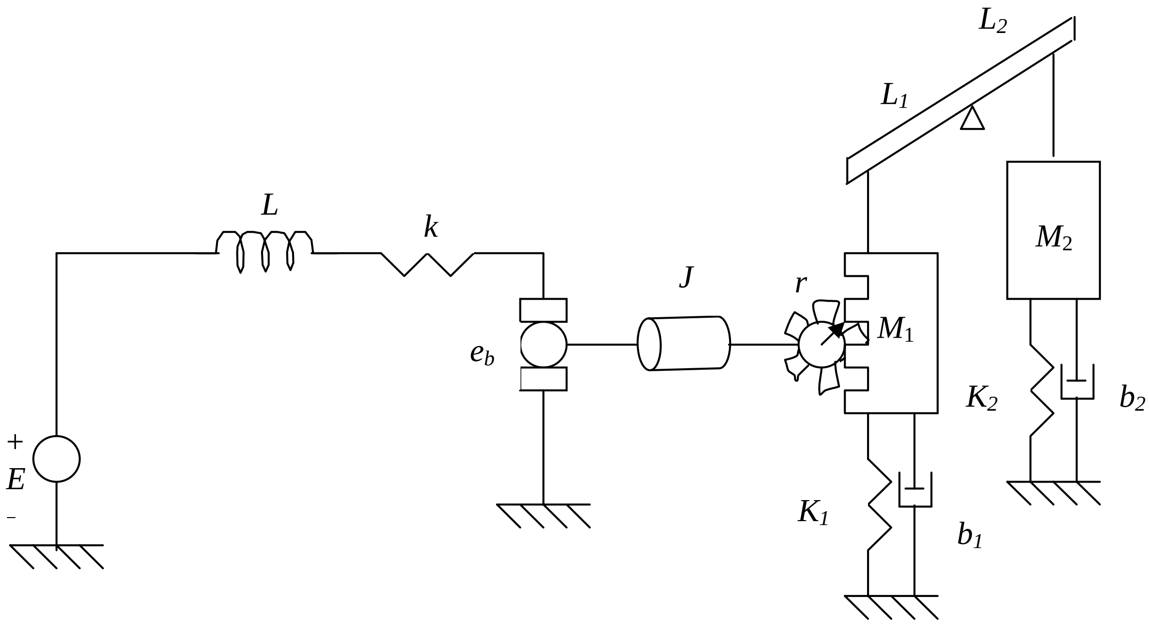
$$I_f^*(s) = \frac{1}{(L_f\, s + R_f)} E_f^*(s) \tag{19}$$

donde T_L queda como una perturbación al sistema.

DIAGRAMA DE BLOQUES



2.- SISTEMA ELECTRICO-MECANICO ROTACIONAL-MECANICO TRASLACIONAL



Objetivo: Determinar la respuesta dinámica de la velocidad $v_1(t)$ de la masa M_1 ante una variación en el voltaje de entrada $E(t)$.

Suposiciones:
1.- La resistencia del sub-sistema eléctrico tiene una relación no-lineal
2.- Los amortiguadores del sub-sistema mecánico tienen relación no-lineal
3.- No existe fricción

Constantes:

K_1, K_2 = Constantes de los resortes
r = radio del cilindro
J = Momento de inercia
L = Inductancia
k = Ctte. de relación en la resistencia
b_1 , b_2 = Cttes. de fricción viscosa
L_1, L_2 = Longitudes de la barra
M_1 , M_2 = Masas
K_b ,K = Cttes. del motor

Variables:

$\omega_j(t)$ = velocidad angular del eje
$\tau(t)$ = Torque del motor
$e_b(t)$= fuerza contraelectromotriz
$i(t)$ = Corriente del circuito eléctrico
$\tau_{rueda}(t)$ = Torque de la rueda
$f_{rueda}(t)$ = fuerza de la rueda
$f_{resorte1}(t)$, $f_{resorte2}(t)$ = fuerza de los resortes
$f_{amort1}(t)$, $f_{amort2}(t)$ = fuerza de los amortiguadores
$f_1(t)$, $f_2(t)$ = fuerzas

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Sub-sistema eléctrico***

$$E - e_L - e_R - e_b = 0 \tag{74}$$

- ***Sub-sistema mecánico rotacional***

$$\tau_j - \tau_{rueda} = J \frac{d\omega_j}{dt} \tag{75}$$

- ***Sub-sistema mecánico traslacional1***

$$f_{rueda} - f_{resorte1} - f_{amort1} - f_1 = M_1 \frac{dv_1}{dt} \tag{76}$$

- ***Sub-sistema mecánico traslacional2***

$$f_2 - f_{resorte2} - f_{amort2} = M_2 \frac{dv_2}{dt} \tag{77}$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$e_L = L \frac{di}{dt} \tag{78}$$

$$e_R = k\, i^2 \tag{79}$$

$$f_{resorte1} = K_1 \int v_1 \tag{80}$$

$$f_{amort1} = b_1 {v_1}^2 \tag{81}$$

$$f_{resorte2} = K_2 \int v_2 \tag{82}$$

$$f_{amort2} = b_2 {v_2}^2 \tag{83}$$

- ***Ecuaciones de transformación***

Eléctrico-mecánico rotacional
$$\begin{cases} e_b = K_b \omega_j & (84) \\ \tau_j = K\, i & (85) \end{cases}$$

Mecánico rotacional-traslacional
$$\begin{cases} \tau_{rueda} = r\ f_{rueda} & (86) \\ \omega_j = \omega_{rueda} = \dfrac{1}{r} v_1 & (87) \end{cases}$$

Mecánico traslacional1-traslacional2
$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{L_1}{L_2} v_2 & (88) \\ f_2 = \dfrac{L_1}{L_2} f_1 & (89) \end{cases}$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas y de transformación en las ecuaciones (74), (75), (76) y (77):

$$E - L\frac{di}{dt} - k\ i^2 - K_b\ \omega_j = 0 \tag{90}$$

$$K\, i - r\ f_{rueda} = J\ \frac{d\omega_j}{dt} \tag{91}$$

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = f_{rueda} - K_1 \int v_1 - b_1 v_1{}^2 - f_1 \tag{92}$$

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} = f_2 - K_2 \int v_2 - b_2 v_2{}^2 \tag{93}$$

$$\omega_j = \frac{1}{r} v_1 \tag{87}$$

$$v_1 = -\frac{L_1}{L_2} v_2 \tag{88}$$

$$f_2 = \frac{L_1}{L_2} f_1 \tag{89}$$

Organizando las ecuaciones (87), (88), (89), (90), (91), (92) y (93) se obtiene el modelo matemático del sistema:

$$L \frac{di}{dt} = E - k\, i^2 - K_b\, \omega_j \tag{94}$$

$$J \frac{d\omega_j}{dt} = K\, i - r\ f_{rueda} \tag{95}$$

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = f_{rueda} - K_1 \int v_1 - b_1\, v_1^{\,2} - f_1 \tag{92}$$

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} = f_2 - K_2 \int v_2 - b_2\, v_2^{\,2} \tag{83}$$

$$\omega_j = \frac{1}{r} v_1 \tag{87}$$

$$v_1 = -\frac{L_1}{L_2} v_2 \tag{88}$$

$$f_2 = \frac{L_1}{L_2} f_1 \tag{89}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

Linealizando las ecuaciones y restando el estado estacionario

$$L\frac{di^{*}}{dt} = E^{*} - 2k\,\bar{i}\,i^{*} - K_b\,\omega_j^{*} \tag{96}$$

$$J\frac{d\omega_j^{*}}{dt} = K\,i^{*} - r\,f_{rueda}^{*} \tag{97}$$

$$M_1\frac{dv_1^{*}}{dt} = f_{rueda}^{*} - K_1\int v_1^{*} - 2\,b_1\,\bar{v}_1\,v_1^{*} - f_1^{*} \tag{98}$$

$$M_2\frac{dv_2^{*}}{dt} = f_2^{*} - K_2\int v_2^{*} - 2\,b_2\,\bar{v}_2\,v_2^{*} \tag{99}$$

$$\omega_j^{*} = \frac{1}{r}v_1^{*} \tag{100}$$

$$v_1^{*} = -\frac{L_1}{L_2}v_2^{*} \tag{101}$$

$$f_2^{*} = \frac{L_1}{L_2}f_1^{*} \tag{102}$$

Tomando transformada de Laplace:

$$L\,s\,I^*(s) = E^*(s) - 2k\,\bar{i}\,I^*(s) - K_b\,W_j{}^*(s) \quad (103)$$

$$J\,s\,W_j{}^*(s) = K\,I^*(s) - r\,F_{rueda}{}^*(s) \quad (104)$$

$$M_1\,s\,V_1^*(s) = F_{rueda}{}^*(s) - \frac{K_1}{s}V_1^*(s) - 2\,b_1\,\overline{v_1}\,V_1^*(s) - F_1^*(s) \quad (105)$$

$$M_2\,s\,V_2{}^*(s) = F_2{}^*(s) - \frac{K_2}{s}V_2{}^*(s) - 2\,b_2\,\overline{v_2}\,V_2{}^*(s) \quad (106)$$

$$W_j{}^*(s) = \frac{1}{r}V_1{}^*(s) \quad (107)$$

$$V_1^*(s) = -\frac{L_1}{L_2}V_2{}^*(s) \quad (108)$$

$$F_2{}^*(s) = \frac{L_1}{L_2}F_1{}^*(s) \quad (109)$$

DIAGRAMA DE BLOQUES